Minimal caps

Emre Karayalcin

Sinds het kaartspel SET is uitgekomen zijn wiskundigen over de hele wereld er door geobsedeerd. De meest bekende vraag die werd gesteld over dit spel zal wel zijn: hoeveel kaarten kan je op tafel hebben zonder dat er een set in zit? Het is wiskundigen al gelukt om deze vraag te beantwoorden, door een analogon te creëren met $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$, en een structuur te vinden zodanig ze 20 punten uit deze vectorruimte hadden gepakt, waarvoor geldt dat voor geen enkel drietal verschillende punten x, y, z in deze deelverzameling de som van dit drietal nul is. Wat dan blijkt is dat voor elk punt niet in deze verzameling, een tweetal punten is uit onze verzameling zodanig dat deze drie punten een som heeft van 0. Dat wil zeggen, als we terugkijken naar het kaartspel, dat elke kaart die niet al op tafel ligt, een set zou creëren. Dus er kan geen enkele kaart meer bij.

Zo'n deelverzameling waarvoor geldt dat voor elk punt dat niet in deze deelverzameling zit het de nul som creëert, heet een *Cap* [1]. Het voorbeeld van 20 in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ is een voorbeeld van een *Maximal Cap*, dat wil zeggen dat er geen cap is met meer punten dan dit. Er is veel onderzoek geweest naar maximal caps in dit geval en ook hogere dimensies, waarbij het wiskundigen is gelukt om structuren toe te kennen aan deze caps invariant onder affiene transformaties. Maar de reden dat het een *maximal cap* heet leidt al tot meer vragen. Zijn er ook kleinere caps? het antwoord op deze vraag is ja. In $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^4$ is er ook een cap bestaande uit 16 punten. Het feit dat er caps zijn van verschillende groottes laat zien dat het kiezen van de punten een belangrijke rol heeft in het bepalen van de grootte van je cap. Als je de grootst mogelijke cap zou willen construeren probeer je punten te kiezen zodanig dat je "oplossingen" (punten waarvoor geldt dat de som van dit punt en twee gekozen punten nul is) met meerdere tweetallen punten een nul-som maakt. Door dit te doen blijft het aantal oplossingen kleiner dan als je punten kiest zodanig dat elke oplossing maar met één tweetal een nul-som maakt. Als één punt twee nul-sommen maakt, dan heet de verzameling van vier punten een interset (intersect in set), en in het vinden van minimale caps is het belangrijk om zo groot mogelijke verzameling te vinden waarin geen intersets bevat zijn. Uit simulaties lijkt voor het vier-dimensionale geval zo'n verzameling uit negen punten te bestaan, maar dit heb ik nog niet bewezen. Ook lijkt het erop dat voor 1, 2, 3 en 4 dimensies, dat de structuren van intersets en caps voor de lagere dimensies bevat zijn in de hogere dimensies. ([2] de structuur van de maximale cap in dimensie 5 niet gebaseerd is op de structuur in dimensie 4, maar voor lagere dimensie zie je de structuur wel terug).

Dus vragen die je kan stellen hierover zijn:

- Uit hoeveel elementen bestaat een minimale cap in $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^k$ voor $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ en wellicht $k = 5$?
- Uit hoeveel elementen bestaat een verzameling die geen intersets bevat in dezelfde vectorruimtes? en hoe belangrijk is deze substructuur in het construeren van een minimale cap?

References

[1] Liz McMahon, Gary Gordon, Hannah Gordon, and Rebecca Gordon. *The joy of SET: The many mathematical dimensions of a seemingly simple card game.* Princeton University Press, 2019.

[2] Benjamin Lent Davis and Diane Maclagan. The card game set. *The Mathematical Intelligencer*, 25(3):33–40, 2003.